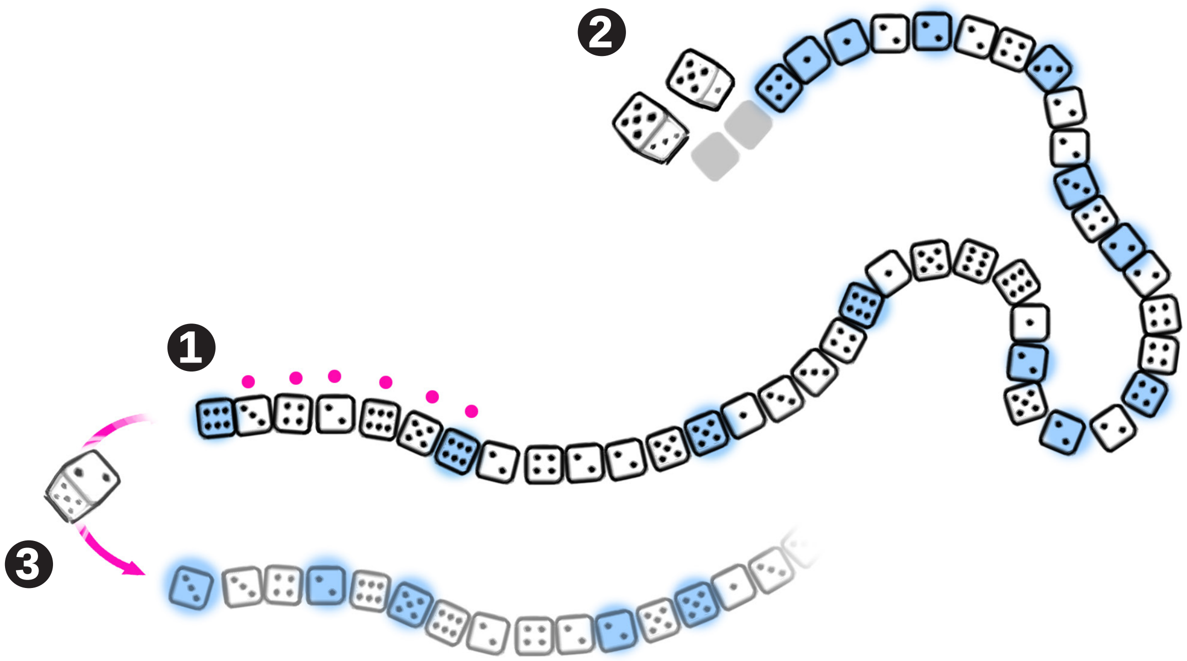
Würfelschlange



Was tun und beachten:

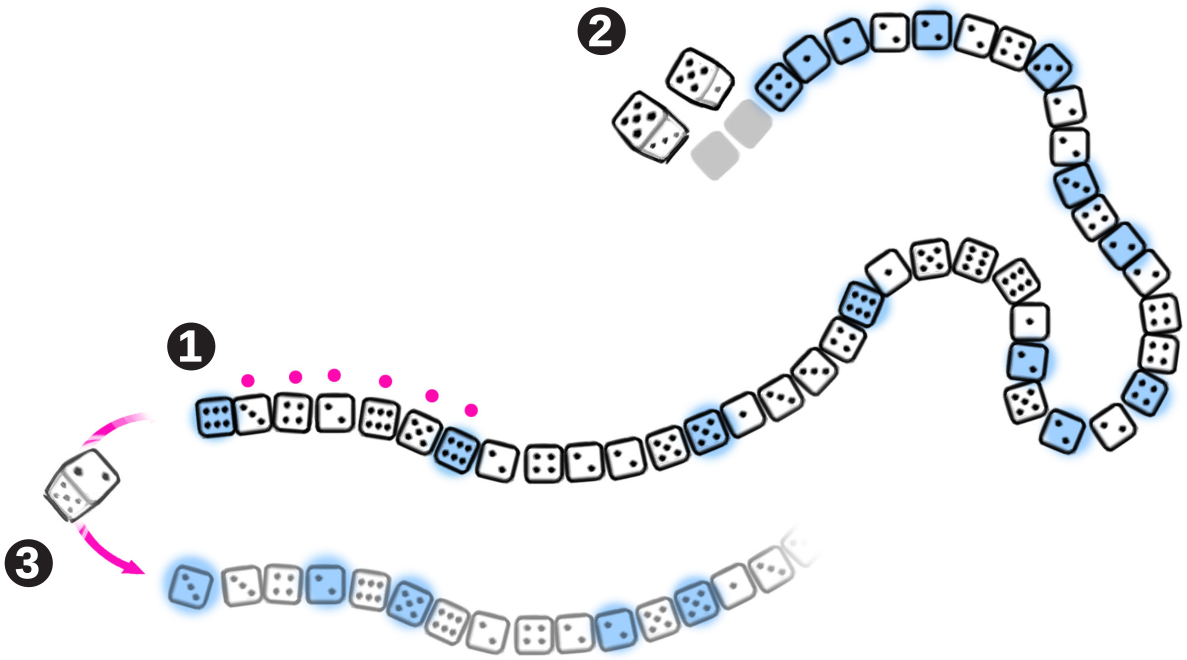
1. *Würfeln Sie alle Würfel und legen Sie sie zu einer Schlange aus. Und jetzt?*
   - *Wählen Sie ein Ende als «Kopf» der Schlange aus. Lesen Sie die Augenzahl und zählen Sie um genau so viele Würfel weiter.*
   - *Von dort aus wird nach demselben Prinzip bis zum Ende weitergezählt.*
2. *Wahrscheinlich wird es nicht aufgehen. Die überzähligen Würfel werden entfernt. Nun zum zweiten Akt!*
3. *Würfeln Sie den ersten Würfel neu, um einen neuen Startwert zu erhalten.*
   - *Sie nähern sich dem Ende - und landen beim letzten Würfel der Schlange!*

Wer mehr wissen möchte:

lesen Sie den Zusatztext

Idee und Konzept: Mathematikum Giessen (D)
Realisation: Technorama
"Würfelschlange_d.indd" ; Nr. 10526

Würfelschlange



Was tun und beachten:

1. *Würfeln Sie alle Würfel und legen Sie sie zu einer Schlange aus. Und jetzt?*
   - *Wählen Sie ein Ende als «Kopf» der Schlange aus. Lesen Sie die Augenzahl und zählen Sie um genau so viele Würfel weiter.*
   - *Von dort aus wird nach demselben Prinzip bis zum Ende weitergezählt.*
2. *Wahrscheinlich wird es nicht aufgehen. Die überzähligen Würfel werden entfernt. Nun zum zweiten Akt!*
3. *Würfeln Sie den ersten Würfel neu, um einen neuen Startwert zu erhalten.*
   - *Sie nähern sich dem Ende - und landen beim letzten Würfel der Schlange!*

Wer mehr wissen möchte:

Idee und Konzept: Mathematikum Giessen (D)
Realisation: Technorama
“Würfelschlange_d.indd” ; Nr. 10526

Würfelschlange

Wer mehr wissen möchte

Warum klappt es? Wie kann das sein?

Wir stellen uns die Würfel, auf die man beim ersten Zählen gekommen ist, markiert vor (Sie können sie gut dadurch markieren, dass Sie die entsprechenden Würfel etwas aus der Schlange herausziehen). Wenn man beim zweiten Zählen irgendwann auf einem der markierten Würfel landet, landet man auch sicher beim letzten Würfel!

Mathematischer Hintergrund

Es handelt sich hierbei um ein Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

In der ersten Phase landet man durch Zählen auf bestimmten Würfeln. Diese nennen wir im folgenden «markierte Würfel». Diese Würfel ergeben einen «Würfel-Pfad», der mit dem letzten Würfel endet. Klar, wenn man einmal auf einen markierten Würfel trifft, dann bleibt man immer auf diesem Pfad.

Das heisst: Die Wahrscheinlichkeit, mit dem letzten Würfel zu enden, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, im Verlauf des Zählens irgendwann einmal auf einem markierten Würfel zu landen. Um diese Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, überlegen wir uns nun die Gegenwahrscheinlichkeit, nämlich niemals auf einen markierten Würfel zu treffen. Da unter den ersten sechs Würfeln der Schlange mindestens einer markiert ist, ist die Wahrscheinlichkeit, im ersten Schritt keinen markierten Würfel zu treffen, höchstens 5/6 (P 0,83).

Auch beim zweiten Schritt ist die Wahrscheinlichkeit, keinen markierten Würfel zu treffen, höchstens 5/6. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, im ersten und zweiten Schritt keinen markierten Würfel getroffen zu haben, höchstens 5/6 x 5/6 (P 0.69).

Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, in den ersten drei Schritten keinen markierten Würfel getroffen zu haben, höchstens 5/6 x 5/6 x 5/6 (P 0,578).

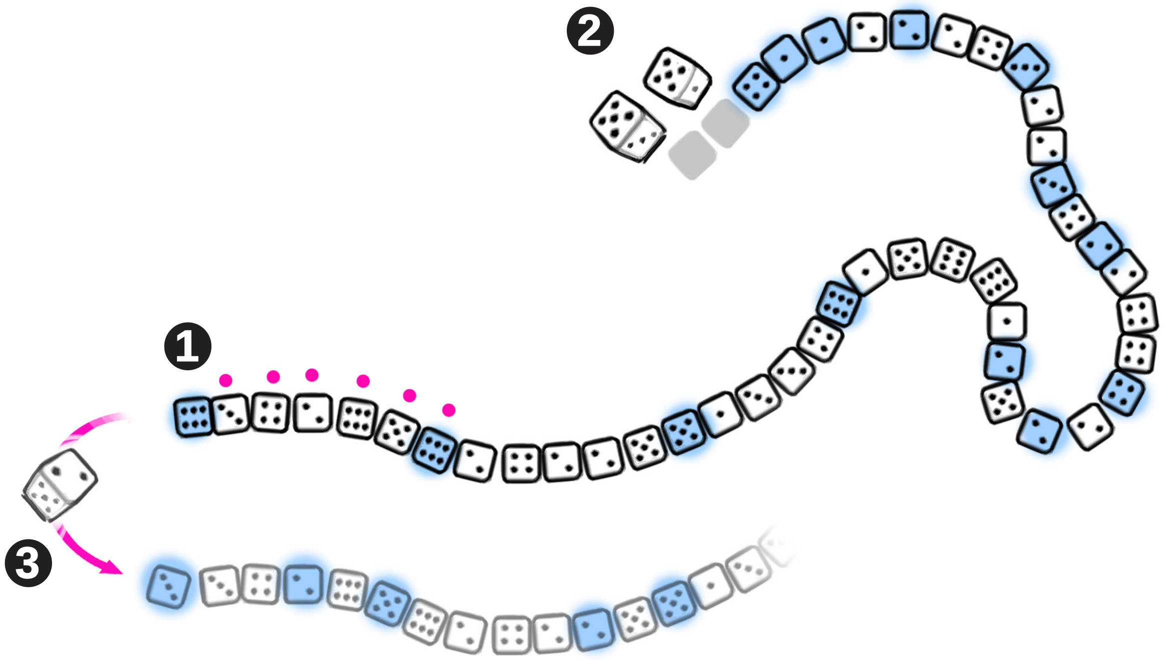
Bei n Schritten ist die Wahrscheinlichkeit, nie einen markierten Würfel zu treffen, höchstens $(5/6)^n$. Da dieser Ausdruck mit wachsendem n sehr schnell klein wird (wie die Mathematiker sagen: gegen 0 geht), wird die Wahrscheinlichkeit schnell verschwindend klein. Dementsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal auf einen markierten Würfel zu treffen, mindestens $1 - (5/6)^n$, und diese Zahl geht sehr schnell gegen 1.

Für n = 10 (60 Würfel) liegt die Wahrscheinlichkeit schon bei 84 %.

Was tun und beachten:

Idee und Konzept: Mathematikum Giessen (D)
Realisation: Technorama
“Würfelschlange_d.indd” ; Nr. 10526

Diced Snake



To do and notice:

1. *Roll all the dice in the bucket in one go. Lay them in a row to form a long random «snake».*
   - *Choose one end to be the «head» and count along the snake according to the number shown on the «head» die.*
   - *Continue counting along the snake according on the numbers in the die you land on.*
2. *When you arrive at the end of the snake you probably won't land right on the tail, so remove the extra dice so that the last one is one you landed on!*
3. *Now the fun bit:*
   - *Roll the head die again so that you have a new random starting number.*
   - *Count along the snake again.*
   - *You will land exactly on the tail!*
   - *Try agian, you will (most probably) land on the last die.*

Want to know more?

Idea and Concept: Mathematikum Giessen (D)
Realisation: Technorama
"Würfelschlange_d.indd" ; Nr. 10526

Diced Snake

Want to know more?

How does it work?

To explain why you (almost) always end up exactly at the end of the snake, imagine the dice which were the temporary tails of the snake, while you were building it, to be highlighted, or moved slightly out of line, so as to be recognizable. When you restart with a different head number, you will probably not land on one of the «temporary tails» to begin with, but sooner or later, you are almost certain to land on one of them, which will necessarily take you exactly to all of the other «temporary tails» and to the final end, as they did when you built the snake!

Mathematical background

The likelihood of success (landing exactly on the tail) depends on the likelihood of landing on one of the «temporary tails» (we'll call it a «t-t»), which are scattered along the snake. It is easier to think of the likelihood of not landing on one!

From the starting point, the next «t-t» position is certainly within six dice, and five of these are «misses», so the probability of missing the «t-t» is 5/6 (or 0.83) at the worst. At the second step, the same applies – the probability of missing a subsequent «t-t» is also 5/6 at the worst.

This means that in two steps, the probability of missing a «t-t» is 5/6 x 5/6 =25/36 (or 0.69) at worst. After each subsequent step, the probability of missing a «t-t» decreases by five sixths, so after 10 steps, the probability of having missed a «t-t» is $(5/6)^{10}$ (or 0.16) at the worst.

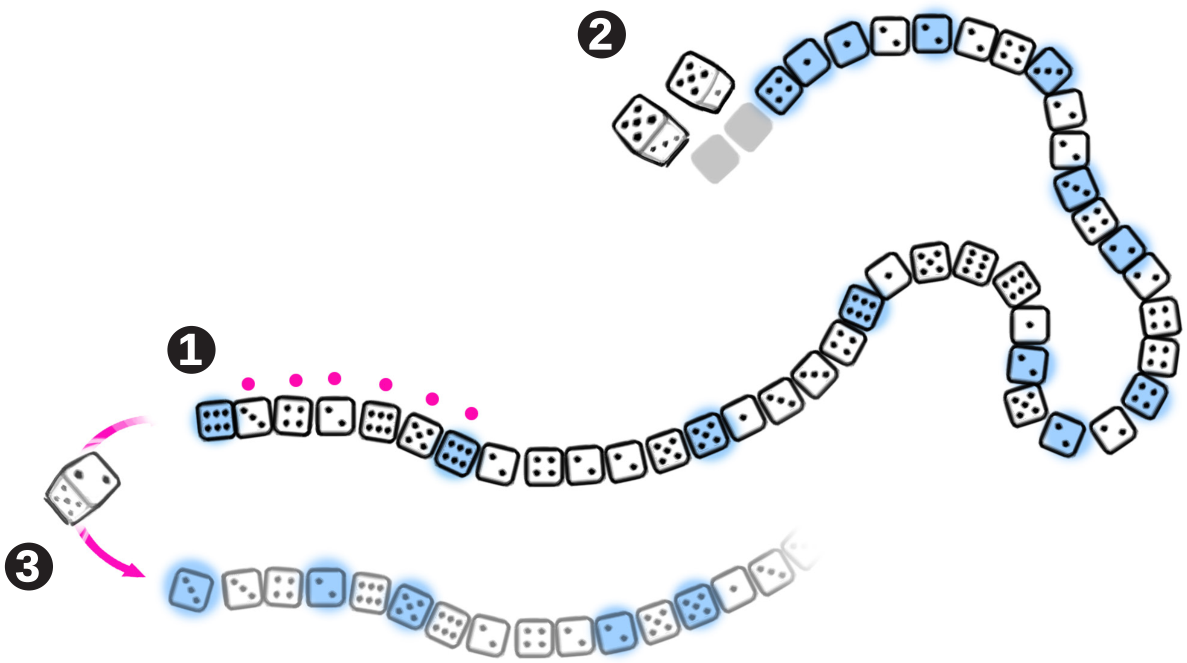
This means that the chance of landing on a «t-t» within 10 moves is 1 - 0.16 (or 0.84) at the worst, so you can expect to end up on the tail better than 84 times in a hundred, which is quite a high likelihood.

Interestingly, you don't have to start at the head – starting anywhere along the snake and following the rule, you will finish up on the tail. Don't start too near the tail, otherwise the probability of missing a «t-t» will not have shrunk small enough to give you a huge chance of landing exactly on the tail.

To do and notice:

Idea and Concept: Mathematikum Giessen (D)
Realisation: Technorama
"Würfelschlange_d.indd" ; Nr. 10526

Chaine de dés



A vous de jouer:

❶ *Lancez tous les dés et composez une chaîne de dés. Et maintenant?*

- *On lit le nombre sur le dé et on se déplace de ce nombre dans la chaîne.*
- *Depuis cette position, vous vous déplacez selon le même principe jusqu'au bout.*

❷ *Probablement ça ne tombe pas juste. Retirez les dés excédentaires. Passons à l'acte 2!*

❸ *On lance le premier dé une nouvelle fois pour avoir une nouvelle valeur de début.*

- *On s'approche du bout de la chaîne - et on tombe sur le dernier dé de la chaîne!*
- *Si cela vous paraît incroyable, répétez le tout!*

Pour en savoir plus:

Idée et Conception: Mathematikum Giessen (D)
Réalisation: Technorama
"Würfelschlange_d.indd" ; Nr. 10526

Chaine de dés

Pour en savoir plus

Pourquoi ça marche? Comment est-ce possible?

Imaginons avoir marqué les dés sur lesquels nous sommes tombés au premier tour (vous pouvez les marquer en les décalant légèrement par rapport au reste de la chaîne). Si l'on tombe sur un des dés marqués au deuxième tour, on tombera sans doute aussi sur le dernier dé!

Bases mathématiques

Il s'agit d'un problème de calcul de probabilité. Pendant la première phase on atterrit sur certains dés en comptant – on les appelle les «dés marqués» par la suite. Ces dés constituent un «chemin de dés» qui finit au dernier dé. Evidemment, si on tombe sur un dé marqué, on restera sur ce chemin. Cela signifie que la probabilité de finir sur le dernier dé est égale à la probabilité de tomber sur un des dés marqués pendant le deuxième tour. Afin de déterminer cette probabilité, réfléchissons à la probabilité du contraire, de ne jamais tomber sur un des dés marqués. Comme il y a au moins un dé marqué parmi les six premiers de la chaîne, la probabilité de ne pas tomber sur un dé marqué est au maximum 5/6 (0,83).

Au deuxième pas, la probabilité de ne pas tomber sur un dé marqué est tout au plus 5/6. Donc la probabilité de tomber sur un dé marqué ni au premier ni au deuxième pas est au maximum 5/6 * 5/6 (=0,69).

Par conséquent, la probabilité de ne pas tomber sur un dé marqué pendant les trois premiers pas est au maximum 5/6*5/6*5/6 (=0,578).

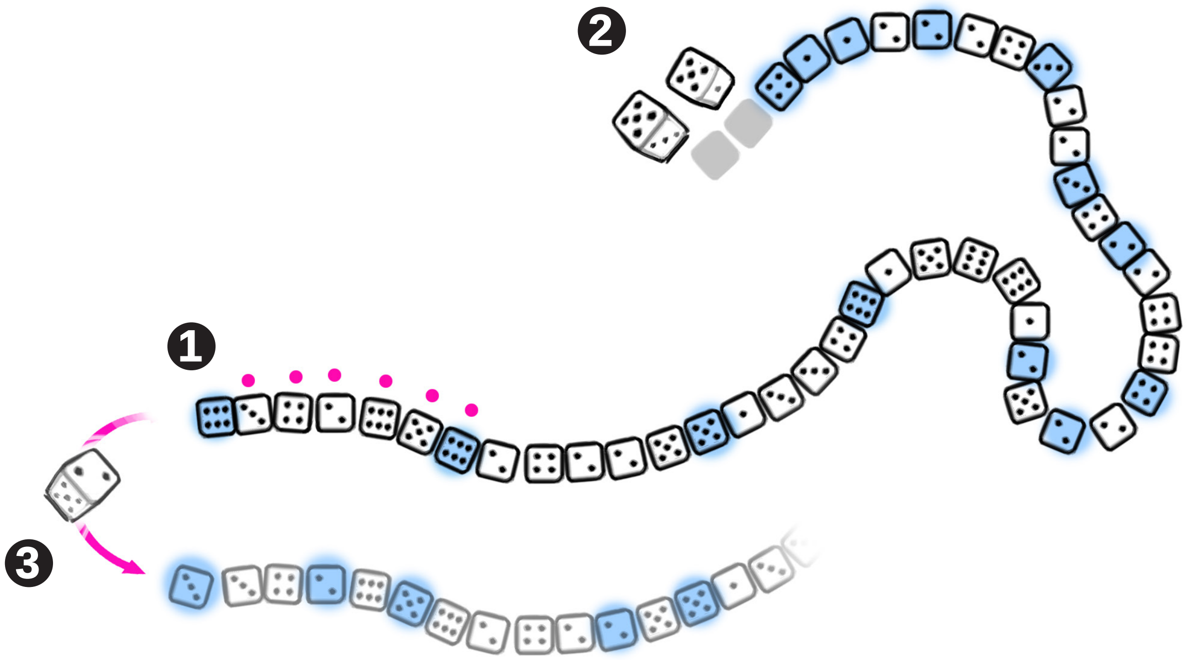
Quand on fait n pas, la probabilité de ne jamais tomber sur un dé marqué est au maximum $(5/6)^n$. Comme le résultat devient très vite très petit quand n est grand (les mathématiciens disent : tend vers 0), la probabilité devient infiniment petite.

Donc la probabilité de tomber au moins une fois sur un des dés marqués, est au moins $1-(5/6)^n$ et ce chiffre tend vite vers 1. Pour n=10 (60 dés) la probabilité est déjà de 84%.

A vous de jouer:

Idée et Conception: Mathematikum Giessen (D)
Réalisation: Technorama
"Würfelschlange_d.indd" ; Nr. 10526

Serpente di dadi



Che cosa fare:

❶ *Lanciate tutti i dadi e disponeteli in fila come un serpente. E adesso?*

- *Leggete il numero del primo dado e contate altrettanti dadi in avanti.*
- *A quel punto ripetete l'operazione.*

❷ *Probabilmente non arriverete fino in fondo. Togliete i dadi che avanzano. Ora passiamo alla seconda fase!*

❸ *Rilanciate il primo dado, per ottenere un nuovo numero da cui cominciare.*

- *Piano piano vi avvicinate alla fine e... finirete sull'ultimo dado della fila!*
- *Se la cosa vi sembra incredibile, ripetete il tutto!*

Vuole saperne di più?

Ideazione e progetto: Mathematikum Giessen (D)
Realizzazione: Technorama
"Würfelschlange_d.indd" ; Nr. 10526

Serpente di dadi

Vuole saperne di più?

Come mai funziona? Come è possibile?

Proviamo a immaginare che i dadi a cui siamo arrivati durante il primo conteggio vengano contrassegnati (potete spostarli leggermente dalla fila per differenziarli dagli altri). Se nel corso del secondo conteggio si arriva su uno dei dadi contrassegnati, potete star sicuri che finirete per arrivare anche all'ultimo!

Retroscena matematico

Si tratta di un problema di calcolo delle probabilità. Nella prima fase si raggiungono determinati dadi. Questi vengono chiamati dadi contrassegnati e formano un «sentiero di dadi» che termina con l'ultimo dado.

Chiaramente quando si arriva a un dado contrassegnato, si rimane poi sullo stesso sentiero.

Questo significa che le probabilità di finire con l'ultimo dado è pari alla probabilità di imbattersi, nel corso del conteggio, in un dado contrassegnato. Per potere definire questa probabilità, proviamo a calcolare la probabilità opposta, cioè quella di non imbattersi mai in un dado contrassegnato. Dato che tra i primi sei dadi del serpente almeno uno è contrassegnato, la probabilità di non trovarne uno marcato al primo conteggio è tutt'al più 5/6 (P = 0,83).

Anche nel secondo conteggio la probabilità di non trovare un dado contrassegnato è al massimo di 5/6, per questo la probabilità di non trovare un dado contrassegnato né nel primo né nel secondo conteggio è al massimo di 5/6 x 5/6 (P = 0,69).

Analogamente, al terzo conteggio la probabilità di non trovare un dado contrassegnato è al massimo di 5/6, per questo la probabilità di non trovare un dado contrassegnato nei primi tre conteggi è al massimo di 5/6 x 5/6 x 5/6 (P = 0,578).

In n conteggi dunque la probabilità di non rinvenire un dado contrassegnato è $(5/6)^n$. Dato che questo si avvicina sempre più a 0 con il crescere di n (ovvero, come dicono i matematici, tende a 0), la probabilità diventa ben presto piccolissima. Di conseguenza anche la probabilità di incontrare almeno una volta un dado contrassegnato è pari almeno a $1-(5/6)^n$ e questo numero aumenta molto rapidamente avvicinandosi a 1. Per n = 10 (60 dadi) la probabilità arriva già all'84%.

Che cosa fare:

Ideazione e progetto: Mathematikum Giessen (D)
Realizzazione: Technorama
"Würfelschlange_d.indd" ; Nr. 10526