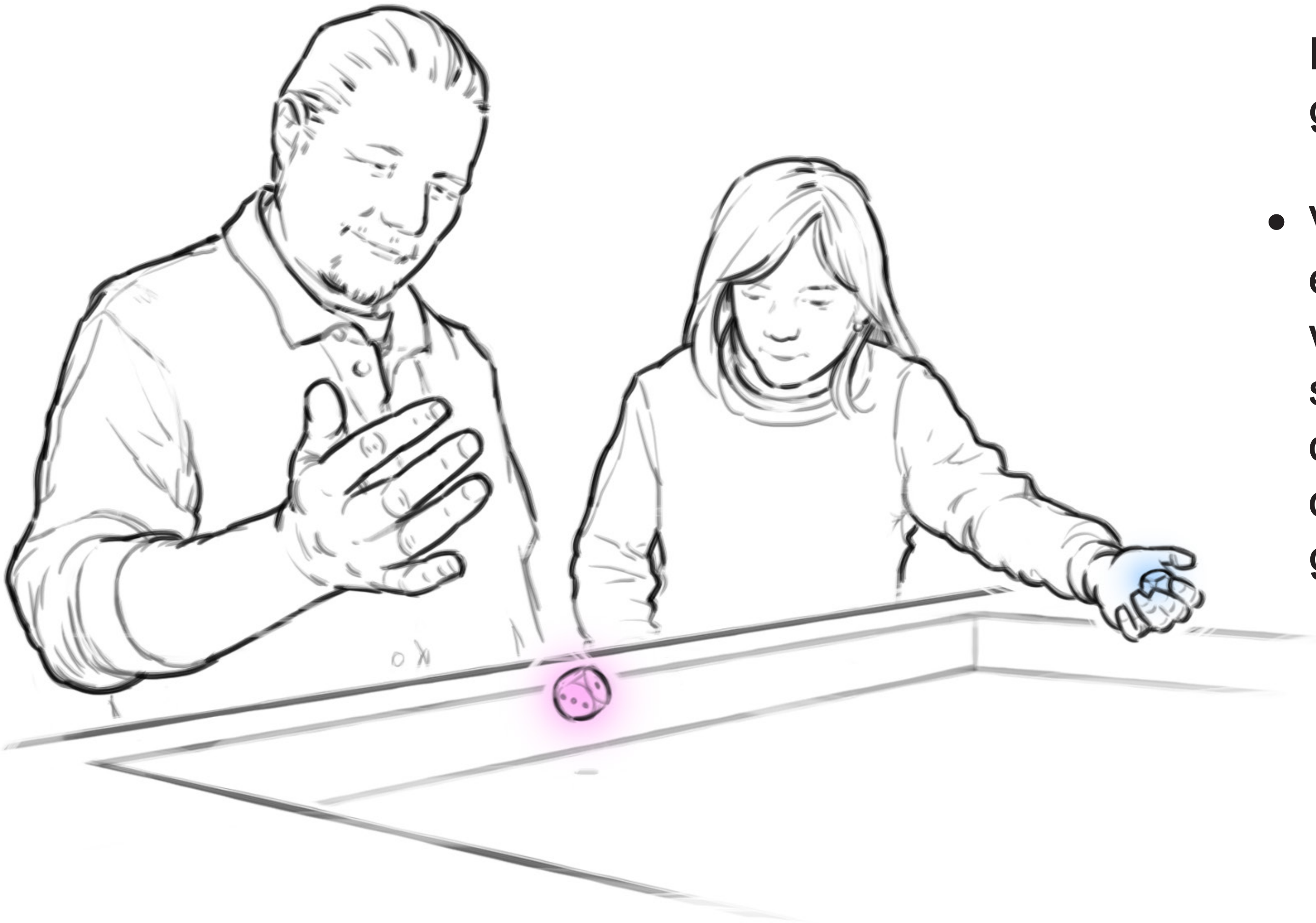
Efronsche Würfel

Der Zweite ist immer der Erste

Dies ist ein unfaires Spiel. Auf dem Tisch liegen vier Würfel, deren Seiten unterschiedlich beschriftet sind.



Was tun und beachten:

- Jeder der beiden Spieler wählt einen Würfel.
  Sie würfeln gegeneinander, wer die höhere Augenzahl hat, bekommt einen Punkt. Wer nach 10 Durchgängen die höhere Punktzahl erreicht hat, hat gewonnen.

- Verblüffend: Wenn man den ersten Spieler einen Würfel auswählen lässt, dann kann man sich unter den verbleibenden drei Würfeln einen wählen, mit dem man statistisch gesehen gewinnt!

Wer mehr wissen möchte:

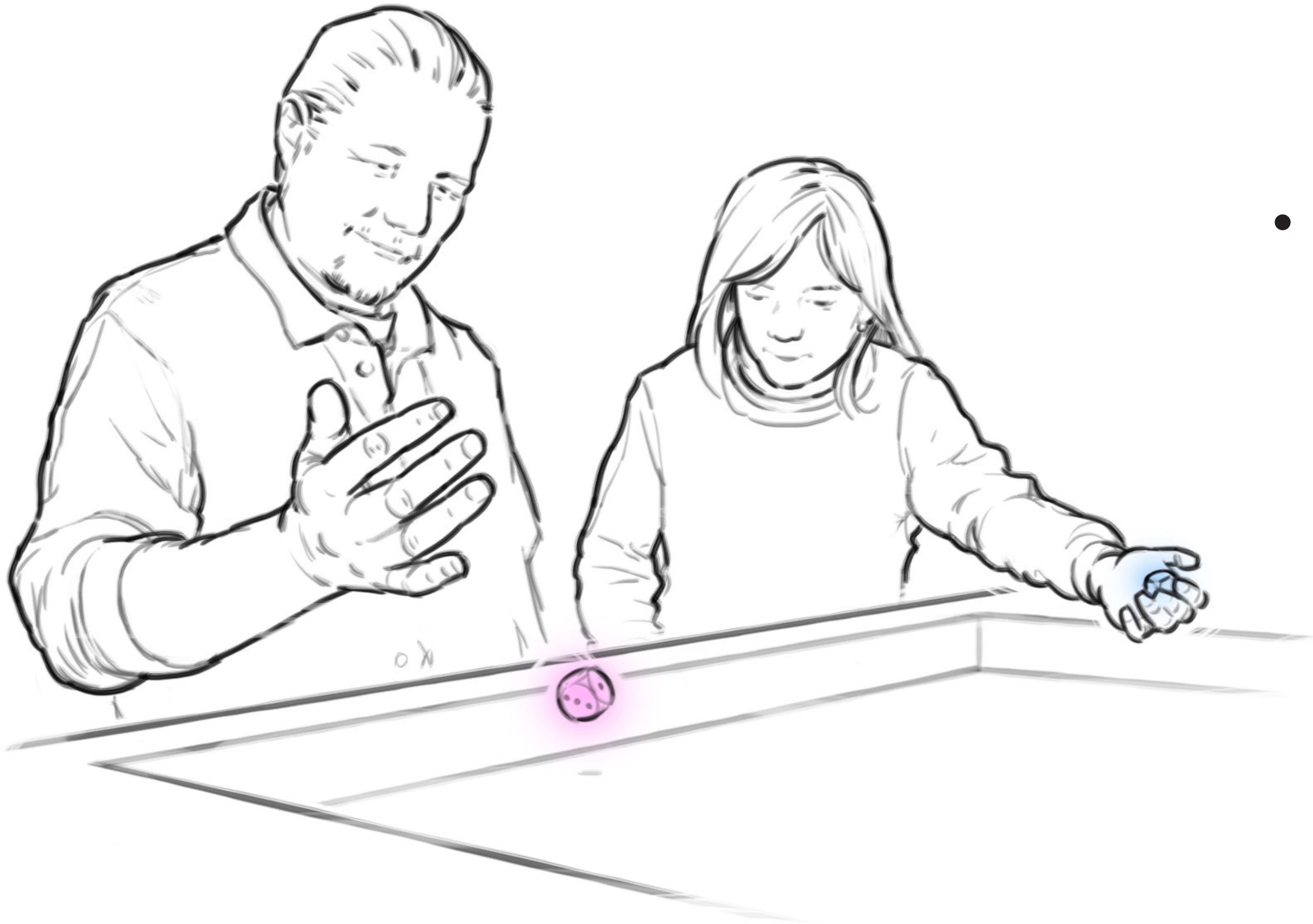
lies den Zusatztext

Idee und Konzept: Mathematikum Giessen / Ausführung: Technorama
"Efronsche Würfel_DEFIL.indd"; Nr. 10098

Efronsche Würfel

Der Zweite ist immer der Erste

Dies ist ein unfaires Spiel. Auf dem Tisch liegen vier Würfel, deren Seiten unterschiedlich beschriftet sind.



Was tun und beachten:

- Jeder der beiden Spieler wählt einen Würfel.
  Sie würfeln gegeneinander, wer die höhere Augenzahl hat, bekommt einen Punkt. Wer nach 10 Durchgängen die höhere Punktzahl erreicht hat, hat gewonnen.

- Verblüffend: Wenn man den ersten Spieler einen Würfel auswählen lässt, dann kann man sich unter den verbleibenden drei Würfeln einen wählen, mit dem man statistisch gesehen gewinnt!

Wer mehr wissen möchte:

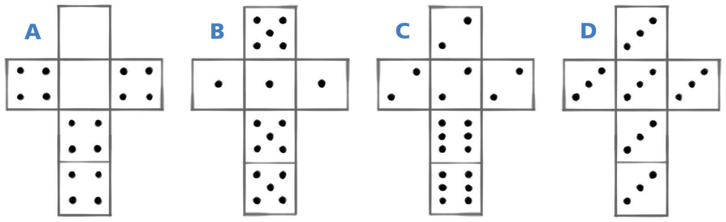
Idee und Konzept: Mathematikum Giessen / Ausführung: Technorama
“Efronsche Würfel_DEFIL.indd”; Nr. 10098

Efronsche Würfel

Der Zweite ist immer der Erste

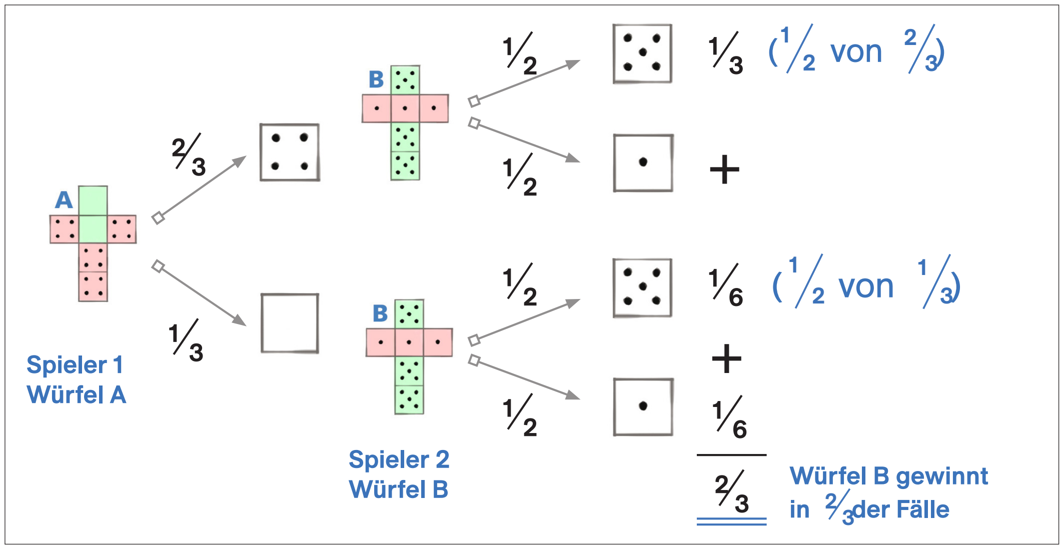
Wer mehr wissen möchte

Bei diesen Würfeln gibt es zu jedem Würfel (A, B, C, D) einen anderen Würfel, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 gegen den ersten Würfel gewinnt (höherer Wert gewinnt). Der zweite Spieler hat daher die Möglichkeit, zu jedem Würfel einen überlegenen Würfel zu wählen - also mit einer 2/3 Wahrscheinlichkeit zu gewinnen. Für uns ungewöhnlich ist, dass die Würfel «nicht transitiv» sind. Normalerweise gilt doch z.B. «wenn Peter besser als Hans und Hans besser als Markus ist, ist Peter auch besser als Markus»! Dies ist hier eben nicht der Fall! Ein ähnliches Beispiel für eine nichttransitive Relation ist das Spiel Schere, Stein, Papier, in dem jedes Symbol gegen eines gewinnt und gegen ein anderes verliert. Das Beispiel der «intransitiven Würfel» zeigt, dass die Relation «ist mit grösserer Wahrscheinlichkeit grösser» für Zufallsvariablen



nicht transitiv sein muss.
Um die Gewinnwahrscheinlichkeiten dieser sogenannten Efron`schen Würfel zu bestimmen, ist es nützlich, die entsprechenden Baumdiagramme zu betrachten. Wenn der erste Spieler den Würfel A (zwei Seiten ohne Wert, auf vier Seiten den Wert 4) wählt, so sollte der zweite Spieler den Würfel B (je drei Seiten mit den Werten 1 und 5) wählen.

Das Baumdiagramm der möglichen Spielverläufe sieht wie folgt aus:



Im Baumdiagramm ist am Ende jedes Asts das Ereignis aufgetragen, seitlich auf dem Ast ist die zugehörige Wahrscheinlichkeit zu finden.

Beispiel: Mit Würfel A erhält Spieler 1 mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3 den Wert 0 und mit der Wahrscheinlichkeit 2/3 den Wert 4. Spieler 2 hingegen erhält beim Würfeln mit Würfel B die 1 und die 5 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 1/2. Wenn das Würfelergebnis von Spieler 2 höher als das von Spieler 1 ist, so hat er das Spiel gewonnen, andernfalls verloren. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist jeweils das Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang der Äste.

Wenn man nun die Gewinnwahrscheinlichkeiten für Spieler 2 addiert, ergibt sich stets die Gesamtwahrscheinlichkeit 2/3. Spieler 2 besitzt also eine doppelt so grosse Chance, das Spiel zu gewinnen, wie Spieler 1.

Wenn der erste Spieler den Würfel B wählt, so nimmt der zweite Spieler Würfel C. Wenn der erste Spieler Würfel C wählt, so nimmt der zweite Spieler Würfel D. Wenn der erste Spieler sich für Würfel D entscheidet, so wählt Spieler 2 Würfel A aus, um zu gewinnen.

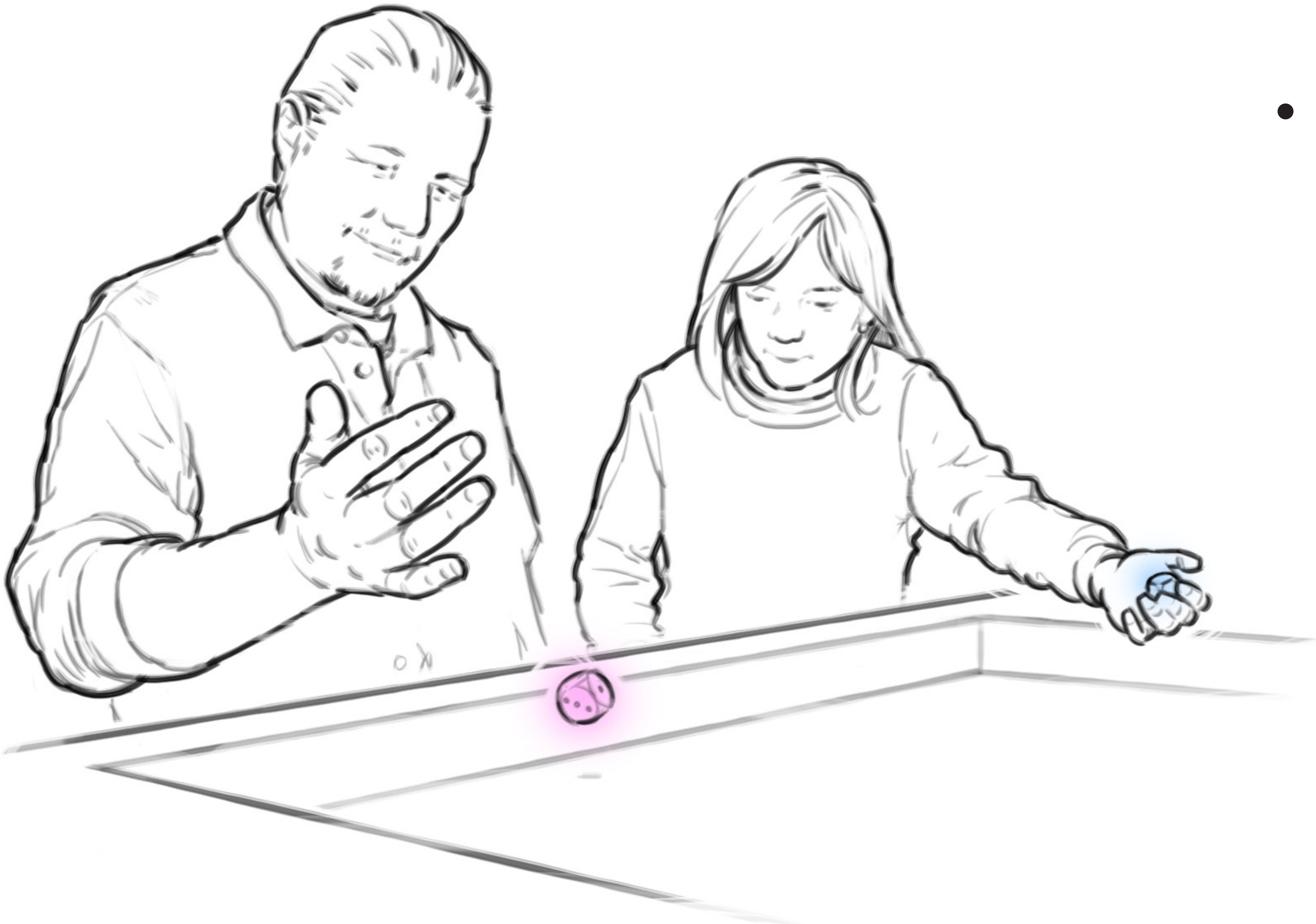
Was tun und beachten:

Idee und Konzept: Mathematikum Giessen / Ausführung: Technorama
"Efronsche Würfel_DEFIL.indd"; Nr. 10098

Efron’s Dice

Second always wins!

This is an unfair game.
There are four different dice to choose from.



To do and notice:

- Two players each choose a dice. They now throw the dice and whoever has the higher number gets a point. Do this ten times and count the points to decide the winner.

- Surprisingly you can let your partner choose any one of the dice, then provided you choose the right one from the remaining three, you can be overwhelmingly likely to win!

Want to know more?

Idea and Concept: Mathematikum Giessen / Realisation: Technorama
“Efronsche Würfel_DEFIL.indd”; Nr. 10098

Efron's Dice

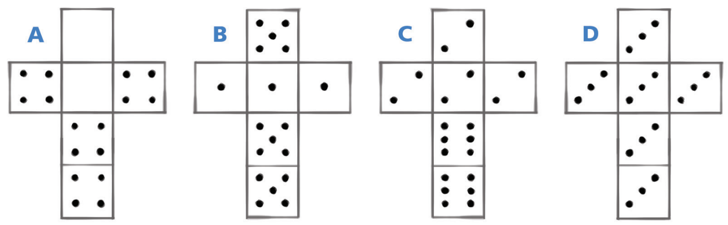
Second always wins!

Want to know more?

This set of four dice (A,B,C,D) has the property that for any one of them, there is another one which is likely to beat it on any throw, with a probability of 2/3. Provided the player who chooses second knows which one to choose, they will probably win (with probability 2:1). It is unusual to have a set of things with a "non-transitive" property. Normally we expect a transitive relationship like "if Peter is better than John, and John is better than Mark, then Paul is better than Mark" to be valid. This isn't the case with these dice!

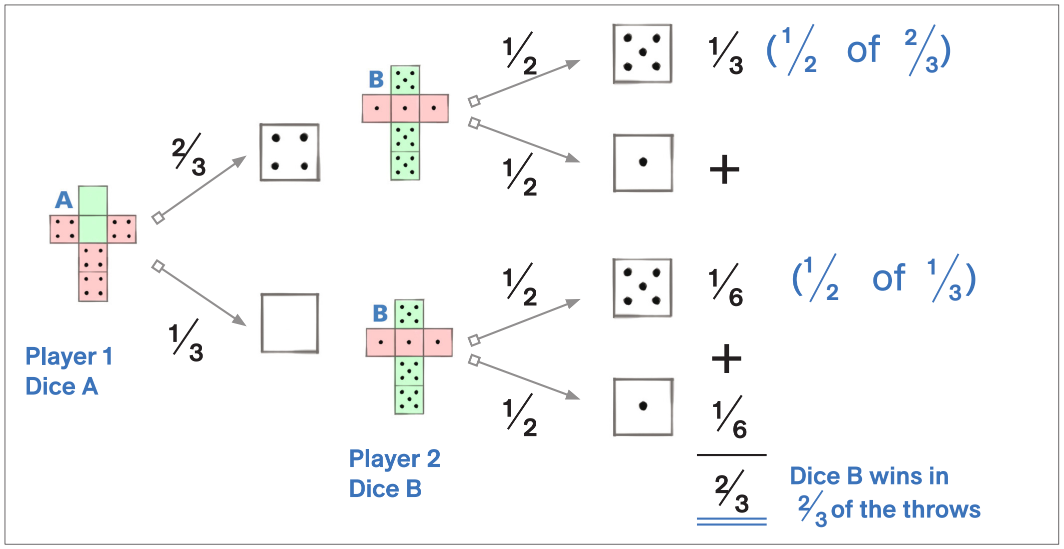
There is another non-transitive relation between the objects in the well known "rock-paper-scissors" game, in which every symbol wins against another and loses against another.

The example here (Efron's dice) shows that the relation-ship "has a greater probability of being greater" for random variables need not be transitive.



To illustrate the way in which the increased probability in the Efron Dice game arises, it is worth working through the "probability tree" for a pair of dice. Suppose the first player chooses dice A (two sides with 0, four sides with a 4, then the second player should choose dice B (three sides with 1, three with 5).

The tree diagram looks like this:



In the probability tree, the outcome of any throw is at the end of a branch (arrow), the probability of that outcome is shown alongside the branch.

Dice A has a 2/3 chance of throwing a 4, and a 1/3 chance of throwing a zero (player A thinks he is on a winner!).1632 Player B has an equal probability (1/2) of throwing a 1 or a 5.

On the right of the diagram you can see the probabilities that B will have the winning throw in each of the cases of A's throw. Notice that following a branch to the end, the probabilities of that outcome are multiplied (shown in brackets).

You then add up the probabilities of each of the outcomes where B wins, and you get 2/3, which is a 2:1 likelihood that B will win, provided that the number of throws is quite large (Jacob Bernoulli's Law of Large Numbers).

Efron's Dice have the property: B beats A, C beats B, D beats C and A beats D, so the player who chooses second should always win.

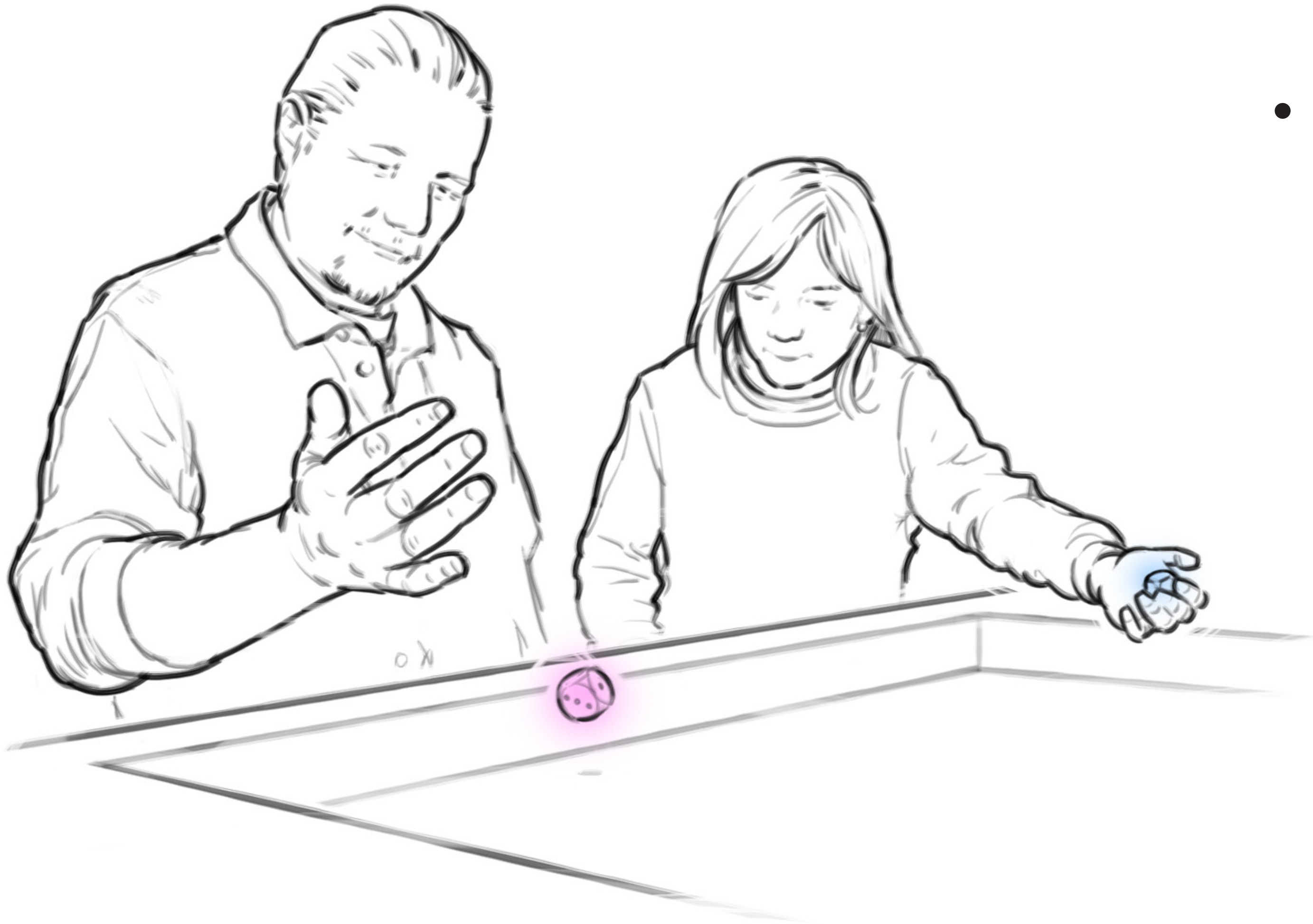
To do and notice:

Idea and Concept: Mathematikum Giessen / Realisation: Technorama
"Efronsche Würfel_DEFIL.indd"; Nr. 10098

Dés d'Efron

Le deuxième est toujours le premier

C'est un jeu inéquitable. Quatre dés sont posés sur la table, avec un nombre différent de points sur chaque face.



A vous de jouer:

- Chacun de deux joueurs choisit un dé.
  Celui qui obtient le score le plus élevé, gagne un point. Celui qui a obtenu le plus de points après 10 tours, a gagné.

- Etonnant: quand on laisse le premier joueur choisir son dé, alors on peut sélectionner un dé parmi les trois restants avec lequel on va gagner statistique-ment!

Pour en savoir plus:

Idée et Conception: Mathematikum Giessen / Ausführung: Technorama
"Efronsche Würfel_DEFIL.indd"; Nr. 10098

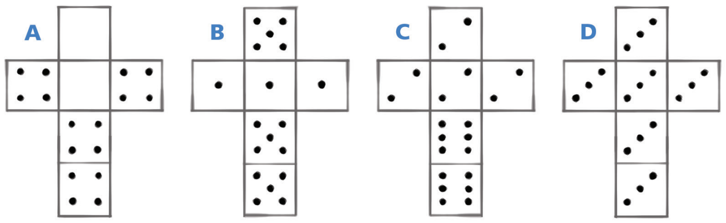
Dés d’Efron

Le deuxième est toujours le premier

Pour en savoir plus

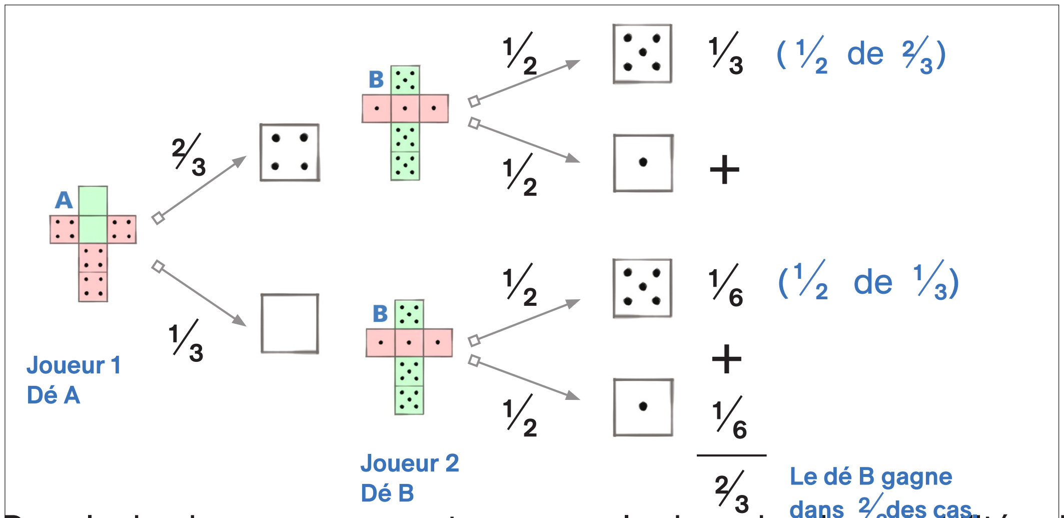
Pour chaque dé (A,B,C,D) il y a un autre dé qui gagne avec une probabilité de 2/3 contre le premier dé (le score le plus élevé gagne). Le deuxième joueur peut donc choisir le dé correspondant – qui va donc gagner avec une probabilité de 2/3. Ce qui est inhabituel c’est que les dés sont «non transitifs». Normalement il est vrai que «si Pierre est mieux que Jean et Jean est mieux que Marc, alors Pierre est mieux que Marc aussi»! Cela n’est justement pas le cas pour nos dés! Un exemple similaire pour une relation non-transitive est le jeu pierre-feuille-ciseaux dans lequel chaque symbole gagne contre un autre et perd contre un autre. L’exemple des dés non-transitifs montre que la relation «plus grand avec une probabilité plus élevée» pour des variables aléatoires n’est pas forcément transitive.

Afin de calculer la probabilité de gain de ces dés d’Efron,



il est utile de regarder le dendrogramme. Si le premier joueur choisit le dé A (2 faces sans points, et 4 faces à 4 points) alors le deuxième joueur devra prendre le dé B (3 faces à 1 point et 3 faces à 5 points).

Voici le dendrogramme de toutes les possibilités du déroulement du jeu:



Dans le dendrogramme, vous trouvez sur les branches la probabilité qui correspond à l’événement indiqué à l’extrémité de chaque branche.

Exemple: Le jouer 1 obtient avec le dé A la valeur 0 avec une probabilité de 1/3 et la valeur 4 avec une probabilité de 2/3. En revanche, le joueur 2 qui joue avec le dé B obtient les valeurs 1 et 5 avec chacune une probabilité de ½. Quand le résultat du joueur 2 est plus élevé que celui du joueur 1, il a gagné le jeu, sinon il a perdu. La probabilité pour cela est le produit des probabilités sur les branches.

Si l’on additionne toutes les probabilités où le joueur 2 gagne, on obtient la probabilité totale de 2/3. Le joueur 2 a donc deux fois plus de chance de gagner le jeu.

Lorsque le premier joueur choisit le dé B, le deuxième prend toujours le dé C. Quand le premier joueur choisit le dé C, alors le deuxième joueur prend le dé D. Quand le premier joueur choisit le dé D, le joueur 2 choisit le dé A pour gagner.

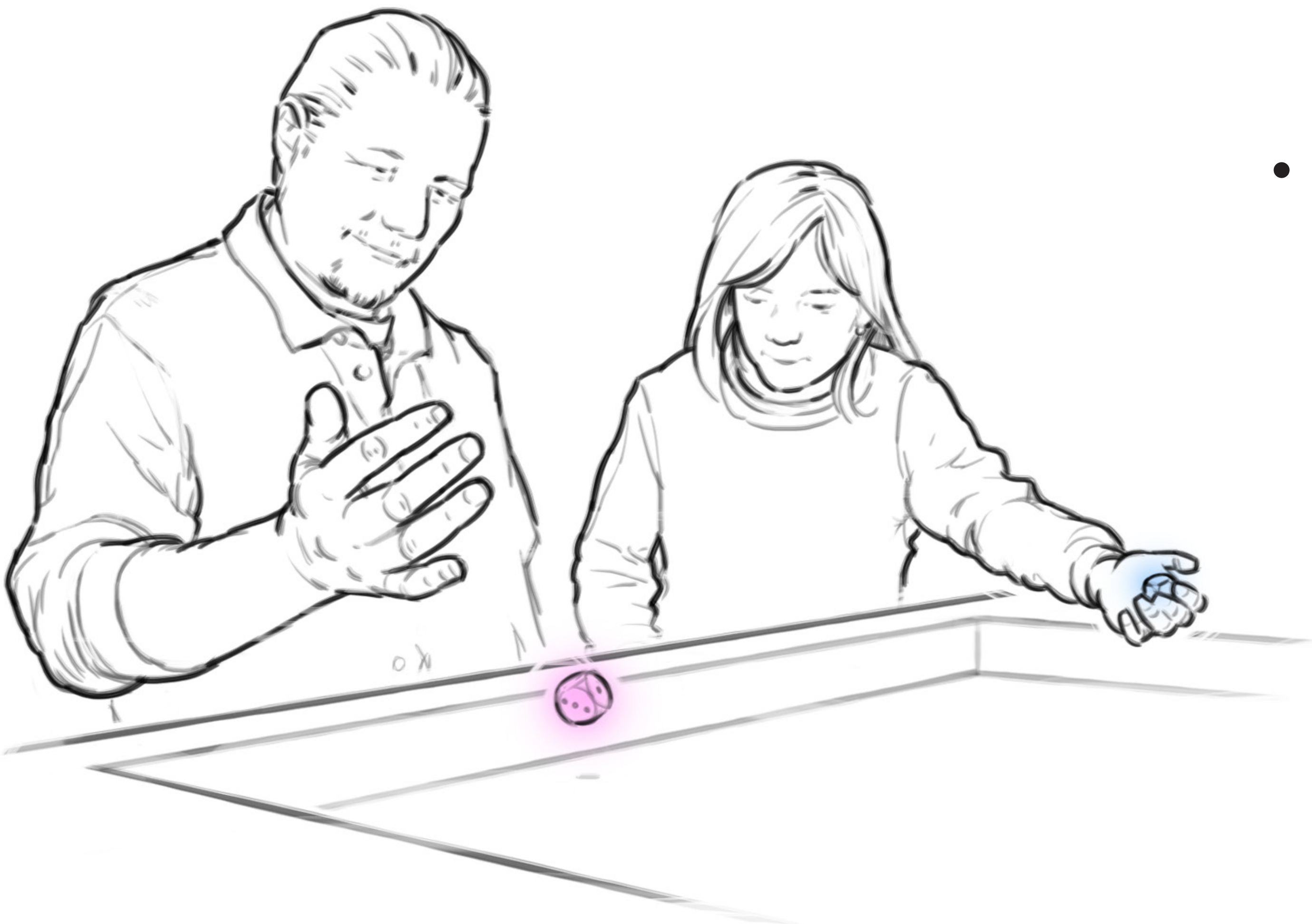
A vous de jouer:

Idée et Conception: Mathematikum Giessen / Ausführung: Technorama
“Efronsche Würfel_DEFIL.indd”; Nr. 10098

Dadi di Efron

Il secondo è sempre il primo

Questo gioco è impari: sul tavolo ci sono quattro dadi, ciascuno dei quali differisce dagli altri per i segni che ha sulle facce.



Che cosa fare:

- Ognuno dei due giocatori sceglie un dado.
  Ognuno lancia il dado prescelto e chi ottiene il punteggio maggiore segna un punto. Chi ha ottiene il punteggio maggiore dopo 10 lanci ha vinto.

- Un fatto sorprendente: se si lascia scegliere al primo giocatore un dado, allora se ne può scegliere fra i tre rimanenti uno con cui, considerando le probabilità
  statistiche, si può essere sicuri di vincere!

Vuole saperne di più?

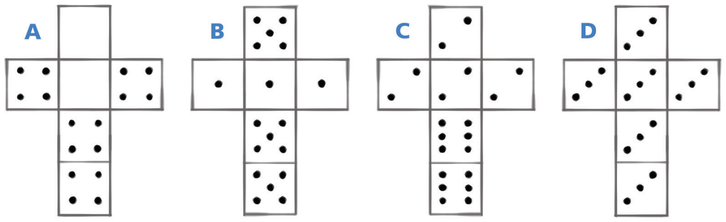
Ideazione e progetto: Mathematikum Giessen / Realizzazione: Technorama
“Efronsche Würfel_DEFI.indd”; Nr. 10098

Dadi di Efron

Il secondo è sempre il primo

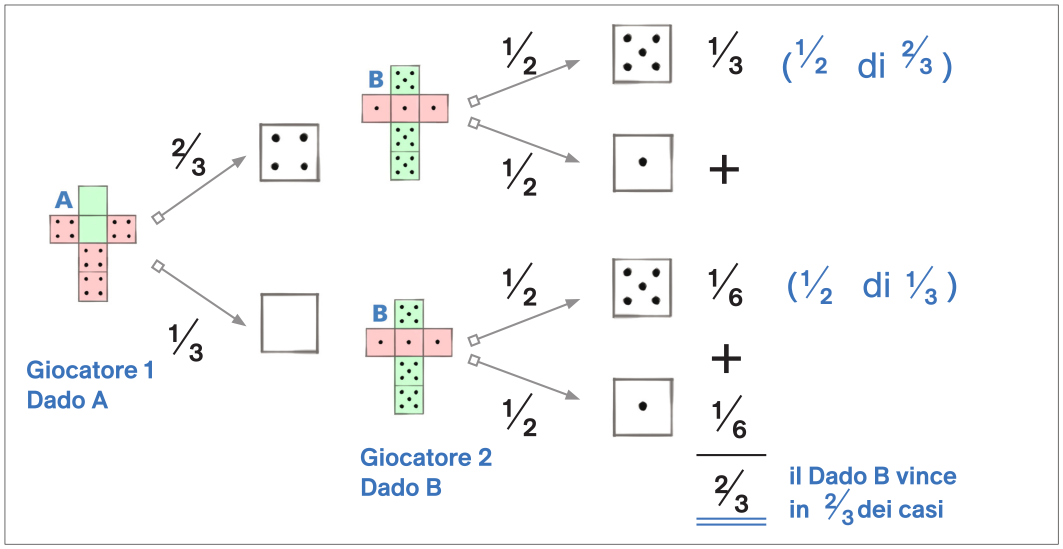
Vuole saperne di più?

In questo gioco di dadi esiste, per ognuno dei dadi (A, B e C) un altro dado che vince contro il primo dado con una probabilità di 2/3 (vince il valore più alto). Il secondo giocatore ha la possibilità di scegliere per ogni dado dell'avversario un altro dado superiore, dunque di vincere con una probabilità di 2/3. Quello che è insolito per noi è che i dadi “non sono transitivi”. Normalmente infatti vale la proprietà per cui “se Peter è migliore di Hans e Hans è migliore di Markus, allora Peter è migliore di Markus”: qui questo non succede! Un esempio analogo di una relazione non transitiva è quello del gioco della mora cinese che usa i segni carta, forbici, pietra, ognuno dei quali è superiore a un altro e lo vince mentre contro un altro segno risulta perdente. L'esempio dei “dadi intransitivi” dimostra che la relazione “è con maggiore probabilità superiore” non deve necessariamente essere transitiva quando entrano in gioco le variabili casuali. Per definire la probabilità di vincita di questi dadi, detti



di Efron (dal nome dello statistico Bradley Efron) è utile considerare i corrispondenti diagrammi ad albero. Quando il primo giocatore sceglie il dado A (che ha due facce senza alcun valore, mentre su quattro facce compare il valore 4), allora il secondo giocatore dovrebbe scegliere il dado B (che ha tre lati con il valore 1 e altrettanti con il valore 5).

Il diagramma ad albero dei possibili esiti del gioco si presenta così:



Nel diagramma ad albero è riportato alla fine di ogni ramo il risultato, a fianco e sul ramo si trova la probabilità corrispondente.

Esempio: Il giocatore 1 lancia il dado A, avendo una probabilità di 1/3 di ottenere il valore 0 e una probabilità di 2/3 di ottenere il valore 4. Invece il giocatore 2 lancia il dado B ha pari probabilità (1/2) di ottenere i valori 1 o 5. Se il punteggio ottenuto dal giocatore 2 è superiore a quello del giocatore 1, il primo ha vinto, altrimenti ha perso. La probabilità finale è il prodotto delle probabilità che si leggono lungo i rami del diagramma.

Se dunque si vogliono sommare le probabilità di vincita del giocatore 2, si ottiene sempre la probabilità complessiva 2/3. Il giocatore 2 ha dunque la doppia probabilità di vincere la partita rispetto al giocatore 1.

Se il primo giocatore sceglie il dado B, il secondo giocatore prende il dado C, Se il primo giocatore sceglie il dado C, allora il secondo giocatore sceglie il dado D. Se il primo giocatore si decide per il dado D, allora il giocatore 2 sceglie il dado A per vincere.

Che cosa fare:

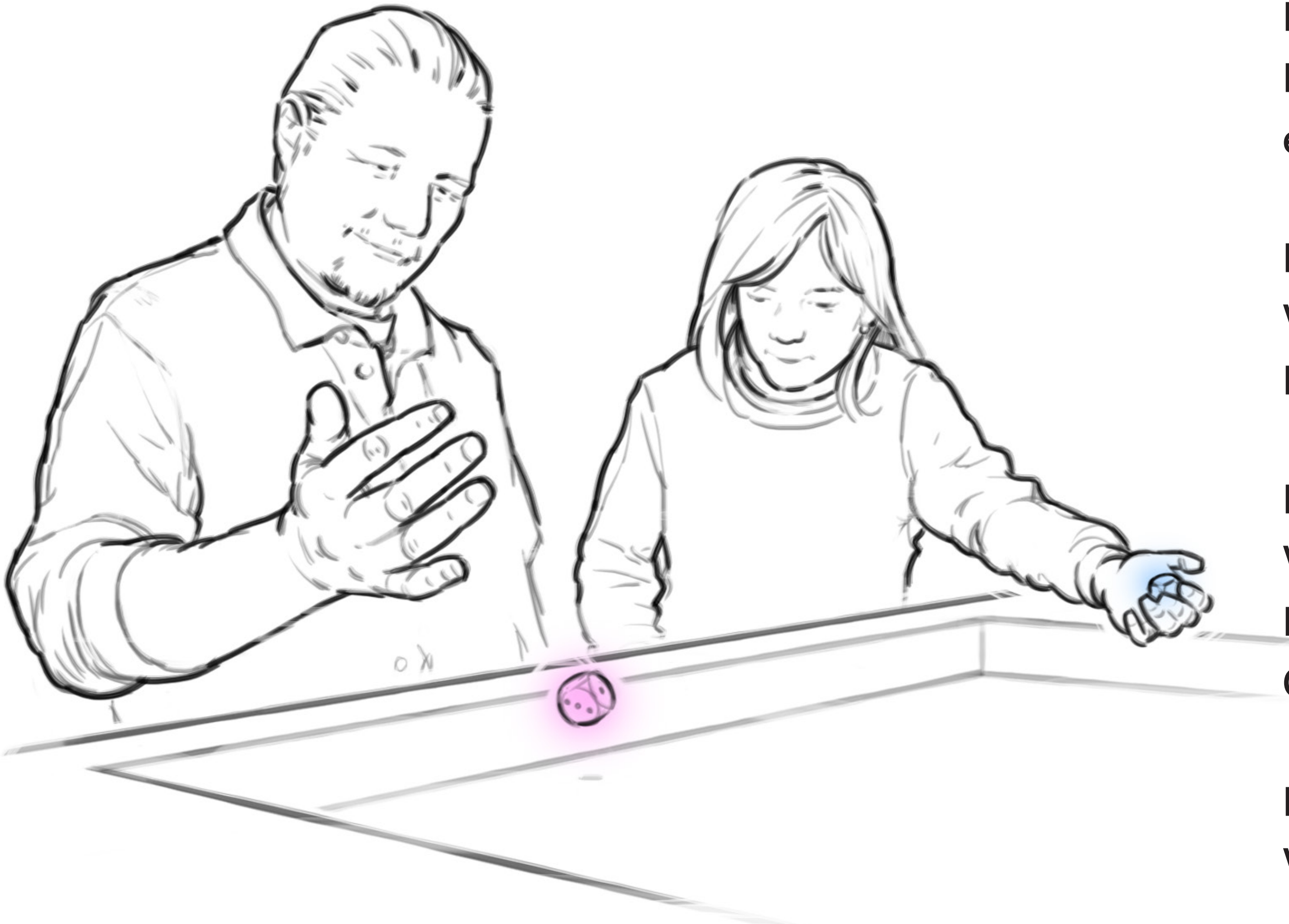
Ideazione e progetto: Mathematikum Giessen / Realizzazione: Technorama
“Efronsche Würfel_DEFIL.indd”; Nr. 10098

Efronsche Würfel

Der Zweite ist immer der Erste

Leichte Sprache

2 Personen spielen gegen·einander.
1 Person gewinnt.
Das Spiel ist **nicht** gerecht.
Das heisst:
1 Person gewinnt öfter.



Was tun:

Es gibt 4 Würfel.
Die Würfel sind **nicht** gleich.

Macht ab:
Wer nimmt zuerst einen Würfel?
Diese Person nimmt einen Würfel.
Die andere Person nimmt auch einen Würfel.

Beide würfeln.
Wer hat mehr Würfel·punkte?
Die Person bekommt 1 Gewinn·punkt.

Beide würfeln.
Wer hat mehr Würfel·punkte?
Die Person bekommt einen Gewinn·punkt.

Macht das 10 Mal.
Wer hat mehr Gewinn·punkte?

Mehr Informationen:

Idee und Konzept: Mathematikum Giessen / Ausführung: Technorama
"Efronsche Würfel_DEFIL.indd"; Nr. 10098

Efronsche Würfel

Der Zweite ist immer der Erste

Leichte Sprache

Mehr Informationen:

Zu jedem Würfel gibt es ein anderer Würfel.
Der andere Würfel gewinnt öfter.
Egal welchen Würfel du wählst:
Der anderer Würfel ist besser.

So sind die Würfel:

Würfel 1:
4 4 4 4 0 0

Würfel 2:
1 1 1 5 5 5

Würfel 3:
2 2 2 2 6 6

Würfel 4:
3 3 3 3 3 3

Die andere Person wählt Würfel 1?
Dann musst du Würfel 2 nehmen.

Die andere Person wählt Würfel 2?
Dann musst du Würfel 3 nehmen.

Die andere Person wählt Würfel 3?
Dann musst du Würfel 4 nehmen.

Die andere Person wählt Würfel 4?
Dann musst du Würfel 1 nehmen.

So kannst du gewinnen.

Was tun:

Idee und Konzept: Mathematikum Giessen / Ausführung: Technorama
"Efronsche Würfel_DEFIL.indd"; Nr. 10098